MAI 1 – 8. cvičení „písemné" – 2. část

2. „Dopočítávání" derivace funkce (v bodech, kde nemůžeme „přečíst" derivace užitím „tabulky" derivací a pravidel pro výpočet derivací) (někdy je to dobré udělat – například pro vyšetřování průběhu fce)

a) $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$!

$D_f = \mathbb{R}$ ($\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$), ale dle „tabulky"

$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ v $(-1,1)$, takže nemůžeme pro výpočet derivace užít „vzorec" pro derivaci složené funkce pro x taková, že $\frac{2x}{1+x^2} = \pm 1$, tj. $x = \pm 1$ (zde, pro arcsin je $(\arcsin)'_-(1) = +\infty$, stejně $(\arcsin)'_+(-1) = +\infty$)

„Vyzkoušíme" aplikaci věty 8.24 (z přednášky 8):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & f \text{ je spojitá v bodě } a(\pm) \ (a \in \mathbb{R}) \\ \text{(ii)} & \text{ex. } \lim\limits_{x \to a(\pm)} f'(x) = D \in \mathbb{R}^* \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ex. } f'_{(\pm)}(a)$$

a platí $f'_{(\pm)}(a) = D \left(= \lim\limits_{x \to a(\pm)} f'(x) \right)$

(i) $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ je spojitá v bodě 1 ($i -1$)
(spojitost složené funkce)

(ii) pro $x \neq \pm 1$ je

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot 2\,\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2\,(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2}\,(1+x^2)} =$$

$$= 2\,\frac{1-x^2}{|1-x^2|}\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{sgn}\,(1-x^2)$$

a $\lim\limits_{x\to 1\pm} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1\pm} \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{sgn}\,(1-x^2) = \mp 1$, tedy (dle V. 8.24) ex. $f'_+(1) = -1$ a $f'_-(1) = +1 \Rightarrow$ f nemá v bodě $x=1$ oboustrannou derivaci

Analogicky (ukažte sami) pro $x=-1$: $f'_-(-1) = -1$, $f'_+(-1) = 1$

Poznámka 4.

U takových „nechtěli" užít větu 8.24 a raději dali přednost definici:

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \underset{*}{=}$$

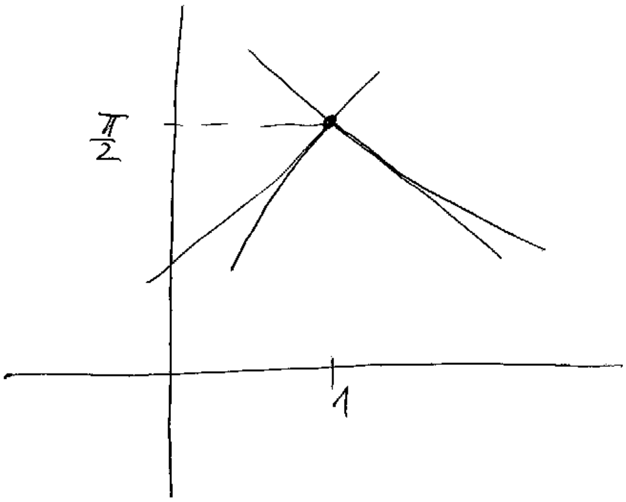
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - \frac{\pi}{2}}{x-1} \overset{?}{=} \frac{0}{0} \underset{l'H}{\overset{asi}{=}}$$

díky spojitosti f v bodě $x=1$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right)'}{1} \rightarrow$$

a to jsme zpátky „nahoře", tj. v případě spojité fce v bodě, kde chceme určit derivaci „se jedná" o „$\frac{0}{0}$" a lze-li užít l'Hospitalovo pravidlo, „máme" $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$! (viz (*))

$\left(\underset{*}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{f'(x)}{1} \right)$ lze-li l'H.



Poznámka 2

Co „znamená" na grafu, že

$f'_-(1) = +1$, a $f'_+(1) = -1$ –

– v bodě $[1, f(1)]$ má graf „špičku" – „polotečna" zleva má směrnici 1 a zprava (-1).

(analog. v bodě $x = -1$ – fce $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ je lichá)

Poznámka 3

Obecně si dokázat:

(i) f je lichá, pro jednoduchost def. v R, pak, ex.-li f' v R, je $f'(x)$ fce sudá (př.: $(x^3)' = 3x^2$, $(\sin x)' = \cos x$)

(ii) f je sudá, def. v R, ex. $f'(x)$ v R, pak $f'(x)$ je funkce lichá (př.: $(x^4)' = 4x^3$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ v $(-1,1)$)

2b) Nejprve ukázat, že daná funkce je spojitá v R a vyšetřit existenci derivace, případně jednostranných derivací v R:

(i) je za dú (bude v řešení dú 8)

(ii) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pro $x \neq 0$, $f(0) = \frac{\pi}{2}$

1) pro $x \neq 0$ je spojitost f důsledek „spojitosti složené funkce"

pro $x = 0$: f bude spojitá v bodě $0 \equiv \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$,

tj. zde ? $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$: tedy výpočet limity:

$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{y\to +\infty} \operatorname{arctg}(y) = \frac{\pi}{2}$, tedy f je spojitá v $x=0$.

2) $\underset{x \neq 0}{f'(x)} = \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)' \underset{\left(\substack{\text{složená} \\ \text{fce}}\right)}{=} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}\cdot\left(\frac{-2}{x^3}\right) = -2\cdot\frac{x}{x^4+1}$

a (i) f je spojitá v bodě 0

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-2x}{x^4+1} = 0$ $\Big\}$ ex. $\underline{f'(0)=0}$

(iii) $\underline{f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} \text{ pro } x \neq 0, \quad f(0) = \frac{1}{2}}$

1) opět: f je spojitá v $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (zřejmé), spojitost v bodě $x=0$?

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \underset{(\text{už „známe"})}{\overset{*}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2},$$

$$\left(\text{také lze „l'Hospitalem"} \overset{*}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} \underset{T}{=} \frac{1}{2}\right)$$

$\underline{\text{tedy } f \text{ je spojitá v } \mathbb{R}}$

2) $\underset{x\neq 0}{f'(x)} = \frac{\sin x \cdot x^2 - (1-\cos x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{x\cdot\sin x - 2(1-\cos x)}{x^3}$

a pak $\underset{(V8.24)}{\underline{f'(0)}} \underset{\text{ex.-li}}{\overset{?}{=}} \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin x - 2(1-\cos x)}{x^3} = „\frac{0}{0}"$

nebo z definice

$$\underline{f'(0)} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}-\frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{2x^3}$$

Vidíte, že obě dvě „limity vedoucí" k $f'(0)$ jsou hodně podobné, obě se asi budou počítat „l'Hospitalem", a asi je trošku jednodušší „ta z definice" – místo $x\cdot\sin x$ je zde x^2

<u>Budeme počítat $f'(0)$ z definice:</u>

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x)-x^2}{2x^3} \;\text{„}\!=\frac{0}{0}\text{“} \underset{l'H.}{=} \lim \frac{2\sin x - 2x}{6x^2} \;\text{„}\!=\frac{0}{0}\text{“}$$

$$\underset{l'H.}{=} \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2}{12x}}_{(*)} \;\text{„}\!=\frac{0}{0}\text{“} \underset{l'H.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x}{12} = 0$$

ale nemusíte jste si všimli, že limita (*) je $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{6 \cdot x} = 0$ („známe")

c) <u>trochu „náročnější" funkce:</u>

$f(x) = \cos\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}\right)$ – máme najít definiční obor této funkce (Df), vyšetřit spojitost v Df a existenci derivace (případně jednostranných derivací)

1) $Df = \{ x \in R;\ x \neq 0 \wedge \frac{x^2-1}{x} \geqq 0 \} = (-1,0) \cup \langle 1,+\infty)$
(snad „jasné")

2) f je spojitá v $(-1,0) \cup (1,+\infty)$ (tj. obvykle) a spojitá zprava v bodě 1 (spojitost složené funkce – (+ $\sqrt{x}$ je spojitá v bodě 0+)

3) f' – „nebezpečí" je v bodě 1+ (neboť zde se projeví „nevlastní" derivace fce $\sqrt{x}$ pro $x=0+$ (asi))

tedy: <u>$x \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$:</u> (složená fce – a tedy derivujeme dle pravidla pro derivaci složené fce)

$$f'(x) = -\sin\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}\right) \cdot \left(\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)}\right)' =$$

$$= -\sin\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

(tedy „dále", tak si to „upraví")

a $\underline{f'_+(1)} = \lim_{x\to 1+} f'(x) = \lim_{x\to 1+} -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \frac{\sin\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}}{\underbrace{\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}}_{\text{VLSF} \to 1}} \underset{AL}{=} \underline{-\frac{1}{2}}$

(věta 8.24
f je spojitá v 1+)

$\left(y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x}} \xrightarrow[x\to 1]{} 0,\ y \neq 0 \text{ a } \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1 \right)$

<u>A jiná poznámka:</u> $f'(1+)$ z definice (opět „podobně" s větou 8.24)

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{\cos\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} - 1}{x} = „\frac{0}{0}" \underset{l'H.}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{\left(\cos\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}\right)'}{1} = \dots$$

5. <u>Vyšetřování extrémů funkce a průběhu funkce.</u>

a) <u>extrémy funkce</u> ($f: M \subset R \to R$)

definice byly v přednášce 6 (Definice 6.7.)

(i) <u>vyšetření lokálních extrémů fce</u>

hledáme „kritické body" pro lokální extrémy (tj. kde „může být")

(1) <u>body nespojitosti fce</u> – př. $f(x) = x^2$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 1$ –
– v bodě $x=0$ je ostré lok. maximum

(2) z bodů spojitosti funkce – <u>v bodech, kde neexistuje derivace dané funkce</u>: př. $f(x) = |x|$ – bod $x=0$ je bodem lokálního (i globálního) minima, ale $f'_\pm(0) = \pm 1$, tj. f nemá derivaci v bodě $x=0$

(3) lokální extrém „může" být v bodech, kde $f'(x)=0$ (ale „nemusí")
(t.zv. stacionární body) – plyne to z „nutné" podmínky pro
lokální extrém (Věta 8.6. – přednáška 8) –

př. $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, tj. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ – je zde
opravdu lokální (i globální) minimum ($x^2 \geq 0$ v R, $f(0)=0$)
ale $f(x) = x^3$ rovněž dává $f'(0) = 0$, ale v $x=0$ extrém
nemá (ani lokální) – $f(x)<0$ v $(-\infty,0)$, $f(x)>0$ v $(0,+\infty)$
$f(0)=0$. (bylo i na přednášce)

Tj. nalezne-li „kritický" bod pro lokální extrém (tedy bod „podezřelý"
z lokálního extrému), pak je třeba vyšetřit chování funkce v okolí
tohoto bodu (např. když $f(a)=0$, tj. „a" je kritický bod,
a f je rostoucí v $(a-\delta,a)$ a klesající v $(a,a+\delta)$, $\delta>0$, pak
v bodě a je opravdu lokální maximum funkce f (a analogicky dále)

(ii) <u>Vyšetření globálních extrémů fce</u> (na $M \subset D_f$)
jediné, kdy víme, že f nabývá globální extrémy, je, když
f je spojitá na $\langle a,b\rangle$, $a<b$ (na kompaktním intervalu),
– věta 6.8 (přednáška 6) –

a hledání extrémů: (1) najdeme kritické body pro lok. extrém
fce (v M) a v nich hodnoty fce
(2) pokud krajní body intervalů z M
nepatří do M, určíme zde limity fce;

a když největší hodnota z (1), (2) bude hodnota funkce,
pak je to maximum funkce na M, je-li největší z hodnot (1), (2)
limita, pak f nemá globální maximum. Analogicky pro
minimum fce na M.

Příklad:

Vyšetřete lokální a globální extrémy funkce

(i) $f(x) = e^{-\sqrt{|x^2-1|}}$

(1) $D_f = R$; f je spojitá v R (spojitost složené funkce a elementárních fcí),

tedy, lokální extrémy funkce nelze mít v bodech, kde není $f'(x)=0$, nebo, kde f derivace nemá;

(2) $f(x) > 0$ v R; $-\sqrt{|x^2-1|} \leqq 0 \Rightarrow f(x) = e^{-\sqrt{|x^2-1|}} \leqq e^0 = 1$, $\Big\} \Rightarrow$

pro $x = \pm 1$ je $f(1) = e^0 = 1$

$\Rightarrow$ f nabývá v bodech $x = 1$, $x = -1$ svého globálního extrému;

a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-\sqrt{|x^2-1|}} \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{y \to +\infty} e^{-y} = 0 \Big\} \Rightarrow$

$f(x) > 0$ v R

$\Rightarrow$ f nemá globální minimum.

Poznámka: je „vidět", že zadaná funkce je sudá v R, tedy lze vyšetřit jen $\langle 0, +\infty)$ a pak vlastnosti „kopírovat" i na $(-\infty, 0\rangle$

A návrat k (1), tj. lokálním extrémům:

v bodech $x = \pm 1$, jsou-li globální maxima, jsou zde i maxima lokální (čili jsme „vlastně" ohodnoceně, než řekla „návod", ale globální extrémy se někdy dají najít ze základních vlastností fce – jako zde, bez „derivování") ještě bychom měl-li tedy zjistit, je-li někde „jinde" než v bodech ± 1 lokální extrém, tedy „jdeme" derivovat:

$$f'(x) = \left(e^{-\sqrt{|x^2-1|}}\right)' = e^{-\sqrt{|x^2-1|}} \cdot \left(-\sqrt{|x^2-1|}\right)' \overset{*}{=}$$ a zde „problém" lze derivovat pro $x^2-1 \neq 0$!

$x \neq \pm 1$!

$$\overset{*}{=} e^{-\sqrt{|x^2-1|}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{|x^2-1|}}\right) \cdot (+2x) \cdot \operatorname{sgn}(x^2-1) =$$

$$= e^{-\sqrt{|x^2-1|}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{|x^2-1|}} \cdot \operatorname{sgn}(x^2-1)$$

a $\underline{f'_+(1)} = \lim_{x\to 1+} f'(x) = „\frac{-1}{0+}" = \underline{-\infty}$, $\underline{f'_-(1)} = \lim_{x\to 1-} f'(x) = \underline{+\infty}$,

(V 8.24)

a podobně $\underline{f'_+(-1)} = \lim_{x\to -1+} f'(x) = „\frac{-1}{0+}" = \underline{-\infty}$, $\underline{f'_-(-1)} = \lim_{x\to -1-} f'(x) = „\frac{1}{0+}" = \underline{+\infty}$,

tedy, extrémy v bodech $x = \pm 1$ jsou ve „špičkách" grafu / f zde nemá derivaci oboustrannou, navíc „tečna" v bodech grafu $[1,1]$ a $[-1,1]$ je „svislá" (polotečna)

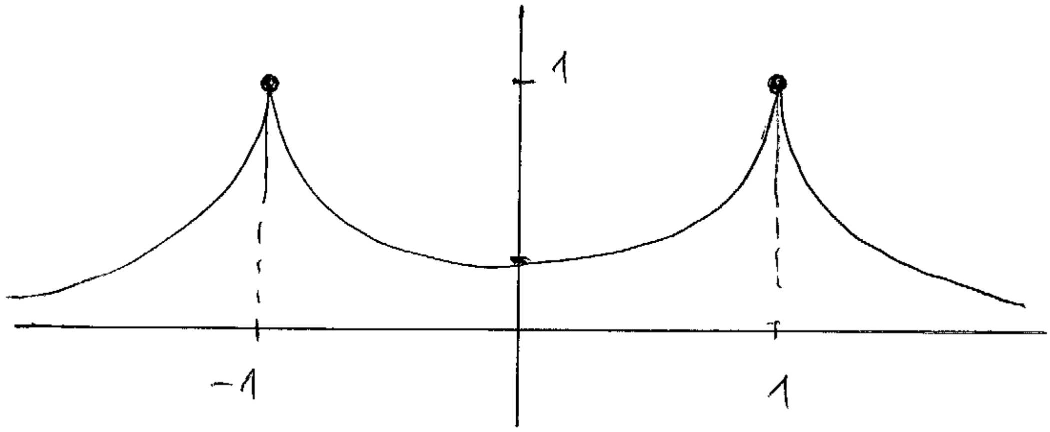
v $R \setminus \{-1;1\}$: $f'(x) = 0 \iff x = 0$ – kritický bod pro lokální extrém

– a upřesnění: $f(0) = e^{-1}$; v $\mathcal{U}(0;1)$ $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{|x^2-1|}}$

(neboť $\operatorname{sgn}(x^2-1) = -1$ v $\mathcal{U}(0;1)$)

tedy $f'(x) < 0$ v $(-1,0) \Rightarrow f$ klesá v $(-1,0)$
$f'(x) > 0$ v $(0,1) \Rightarrow f$ roste v $(0,1)$
$\Big\} \Rightarrow$ f má v bodě $x=0$ ostré lokální minimum ($f(0) = e^{-1}$)

A „neumělý" náčrtek grafu funkce:



(ii) $$f(x) = \frac{e^{|x|}}{x-1}$$

$D_f = (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$, f je spojitá v D_f $\Rightarrow$ kritické body pro lokální extrémy jsou ty, kde derivace je nulová nebo kde funkce derivaci nemá

Pokud (k vyšetření globálních extrémů) bychom se „podívali" na limity funkce v „krajních" bodech, tj. pro $x \to \pm\infty$ a $x \to 1$, tak dostaneme:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x-1} = „\frac{\infty}{\infty}" = \infty \text{ (známe)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x-1} = „\frac{\infty}{-\infty}" = -\infty \left(\overset{l'H.}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{1} = -\infty \right) \Bigg\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f nenabývá ani glob. maxima (limita $+\infty$) ani globálního minima (limita $-\infty$);

navíc, $$\lim_{x\to 1\pm} \frac{e^{|x|}}{x-1} = \lim_{x\to 1\pm} \frac{e^{x}}{x-1} = „\frac{e}{0\pm}" = \pm\infty$$

<u>A vyšetření lokálních extrémů:</u>

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x-1}\right)' = \frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}, \quad x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$

$$f'(x) = \left(\frac{e^{-x}}{x-1}\right)' = \frac{-e^{-x}(x-1)-e^{-x}}{(x-1)^2} = \frac{-x e^{-x}}{(x-1)^2}, \quad x \in (-\infty,0)$$

a $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = -2$, $f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0-} f'(x) = 0$, tj.

f nemá derivaci v bodě $x=0$,

tedy, kritické body pro lokální extrém jsou $x=0$ a $x=2$
(v bodě $x=0$ f nemá derivaci, a $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$)

<u>Vyšetření:</u> $x=2$: $\left.\begin{array}{l} f'(x)<0 \text{ v } (1,2) \Rightarrow f \text{ klesá v } (1,2\rangle \\ f'(x)>0 \text{ v } (2,+\infty) \Rightarrow f \text{ roste v } \langle 2,+\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow$

v bodě $x=2$ má funkce f ostré lokální minimum,
$f(2) = e^2$

<u>$x=0$</u> $\left.\begin{array}{l} f'(x)>0 \text{ v } (-\infty,0) \Rightarrow f \text{ roste v } (-\infty,0\rangle \\ f'(x)<0 \text{ v } (0,1) \Rightarrow f \text{ klesá v } \langle 0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow$

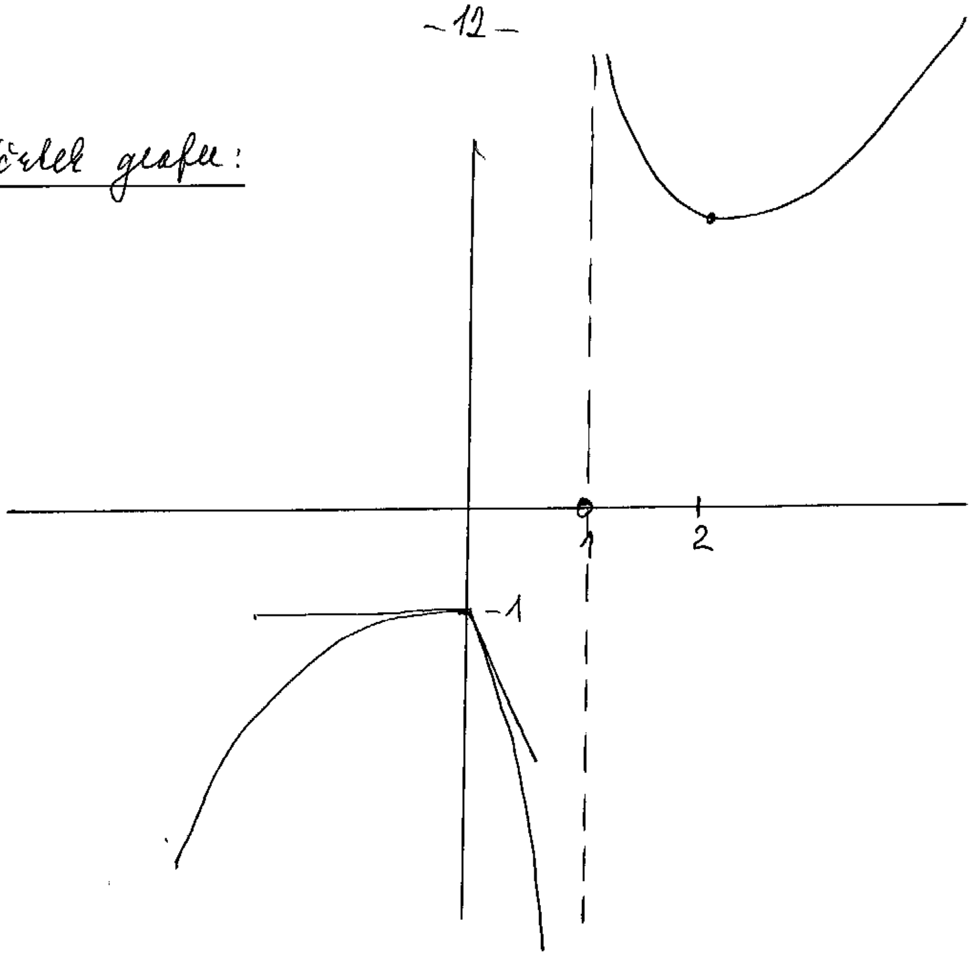
f má v bodě $x=0$ ostré lokální maximum,
$f(0) = -1$.

Náčrtek grafu na další stránce, zatím je poznámka: Tak, jako v bodě a, kde $f'(a)=0$ nemusí být lokální extrém, nemusí být ani v bodě, kde f nemá derivaci:

<u>příklad:</u> $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty,0\rangle \\ x^2, & x \in (0,+\infty) \end{cases}$ $\quad f'_-(0) = 1$, $f'_+(0) = 0$,

ale f je rostoucí v R.

Náčrtek grafu:



Vyšetřování lokálních i globálních extrémů je součástí vyšetřování průběhu funkce.

Pět vyřešených příkladů – jako návod k vyšetřování průběhu – máte v dalším souboru, další řešené příklady budou v domácím úkolu 8 – tj. v „mém" řešení. Pokud byste si přáli ještě další příklady – napište, prosím, který příklad bych měla ještě „udělat".